Planche n° 22. Dérivation

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (***)

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup\{f'(x),\ x \in [a,b]\}$. Montrer que f est affine.

Exercice n° 2 (***) (Formule de Taylor-Lagrange)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et n un entier naturel. Soit f une fonction élément de $C^n([a,b],\mathbb{R}) \cap D^{n+1}(]a,b[,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Indication. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g(x) = f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où A est intelligemment choisi.

Exercice n° 3 (***) (Formule des trapèzes)

Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R}) \cap D^3(]a,b[,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(a)+f'(b)) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}.$$

Indication. Appliquer le théorème de Rolle à g' puis g où $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{x-a}{2}(f'(x)+f'(a)) - A(x-a)^3$ où A est intelligemment choisi.

Que devient cette formule si on remplace f par F une primitive d'une fonction f de classe C^1 sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$? Interprétez géométriquement.

Exercice n° 4 (***)

Déterminer dans chacun des cas suivants la dérivée n-ème de la fonction proposée :

$$\textbf{1)}\ x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x) \quad \textbf{2)}\ x \mapsto \cos^3 x \sin(2x) \quad \textbf{3)}\ x \mapsto \frac{x^2+1}{(x-1)^3} \quad \textbf{4)}\ x \mapsto (x^3+2x-7)e^x.$$

Exercice n° 5 (*I)**

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 6 (T)**

Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a : $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Exercice n° 7 (*I)**

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ pour un certain a non nul. Montrer qu'il existe un point distinct de O de la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par l'origine.

Exercice n° 8 (****) (Toute fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points distincts de I vérifiant $f'(a) < f'(b)$ et soit enfin un réel m tel que $f'(a) < m < f'(b)$.

1) Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} < m < \dfrac{f(b+h)-f(b)}{h}$.

2) Montrer qu'il existe y dans $[a,b]$ tel que $m = \dfrac{f(y+h)-f(y)}{h}$ puis qu'il existe x tel que $f'(x) = m$.

Exercice n° 9 (*IT)

Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction $f\ :\ x \mapsto \cos\sqrt{x}$.

Exercice n° 10 (**) (Généralisation du théorème des accroissements finis)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

Soit $\Delta : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{vmatrix} f(a)-f(x) & f(b)-f(x) \\ g(a)-g(x) & g(b)-g(x) \end{vmatrix} \end{array}$.

1) Montrer que Δ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et calculer sa dérivée.

2) En déduire qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que $(g(b)-g(a))f'(c) = (f(b)-f(a))g'(c)$.

Exercice n° 11 (**)

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice n° 12 (***)

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel, $f\circ f(x) = \dfrac{x}{2}+3$. En remarquant que $f\left(\dfrac{x}{2}+3\right) = \dfrac{f(x)}{2}+3$, montrer que f' est constante puis déterminer f.

Exercice n° 13 (*I)**

Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. (Indication. Considérer $g(x) = e^x f(x)$).

Exercice n° 14 (*I)**

Etudier la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1) $u_0 \geqslant -1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ **2)** $u_0 > -1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n)$

3) $u_0 \in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$ **4)** $u_0 \in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$

5) $u_0 \in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(2u_n)$ **6)** $u_0 \in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

